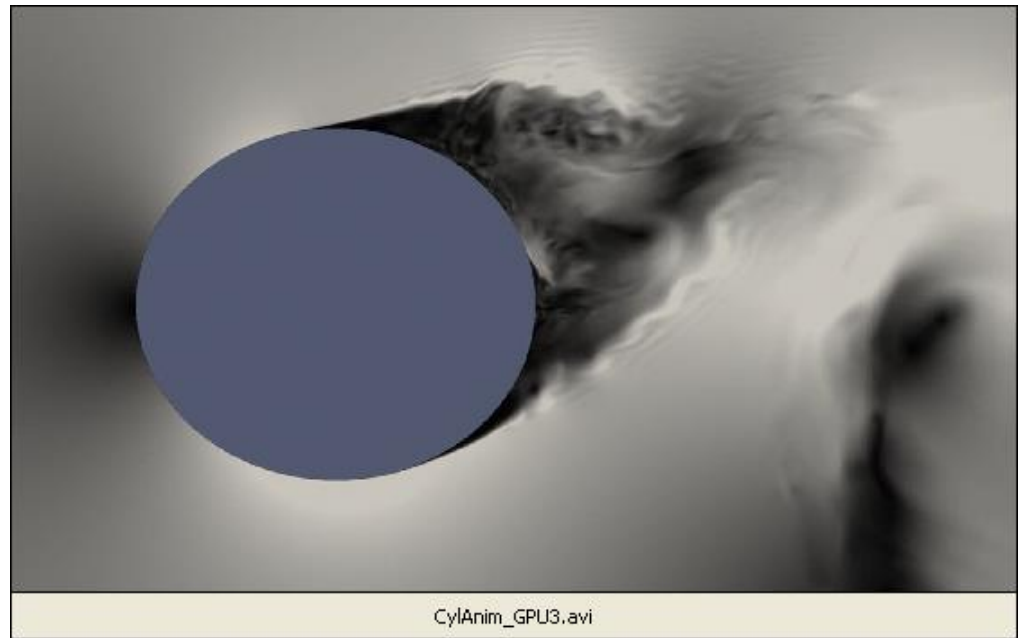




Трехмерное обтекание цилиндра при $Re=40000$

Головизнин В.М.
***Суперкомпьютеры и
вычислительная гидродинамика***





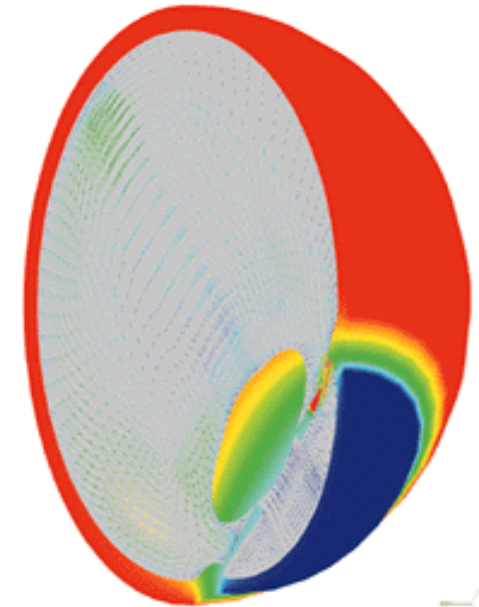
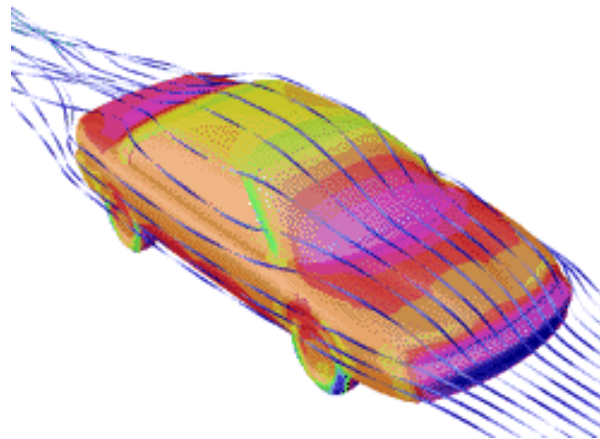
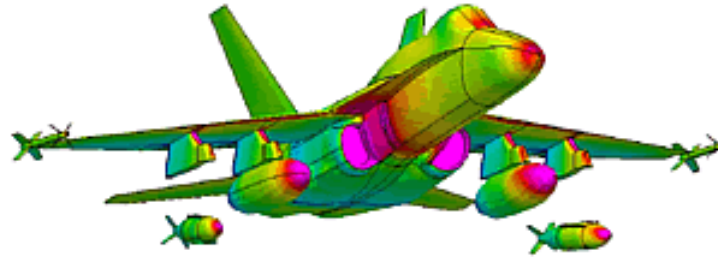
СОДЕРЖАНИЕ

- Что такое «вычислительная гидродинамика»?
- Исторические вехи в развитии вычислительной гидродинамики.
- Современное состояние и основные проблемы



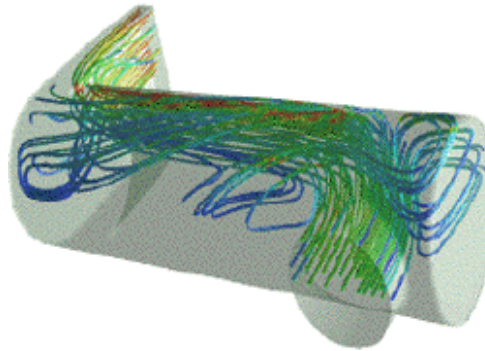
ОБЛАСТИ ПРИМЕНЕНИЯ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ ГИДРОДИНАМИКИ

- Where is CFD used?
 - **Aerospace**
 - **Automotive**
 - **Биомедицина**
 - Химические технологии
 - HVAC
 - Hydraulics
 - Marine
 - Oil & Gas
 - Power Generation
 - Sports

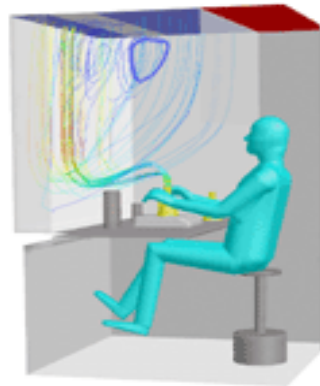


Temperature and natural convection currents in the eye following laser heating.

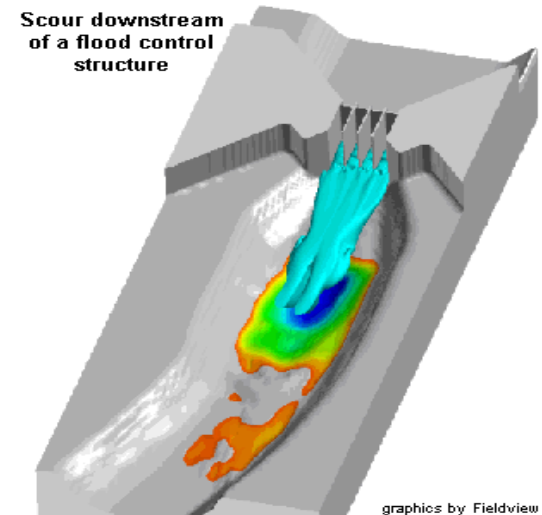
- Where is CFD used?
 - Aerospace
 - Automotive
 - Biomedical
 - **Chemical Processing**
 - **HVAC**
 - **Hydraulics**
 - Marine
 - Oil & Gas
 - Power Generation
 - Sports



Polymerization reactor vessel - prediction of flow separation and residence time effects.



Streamlines for workstation ventilation



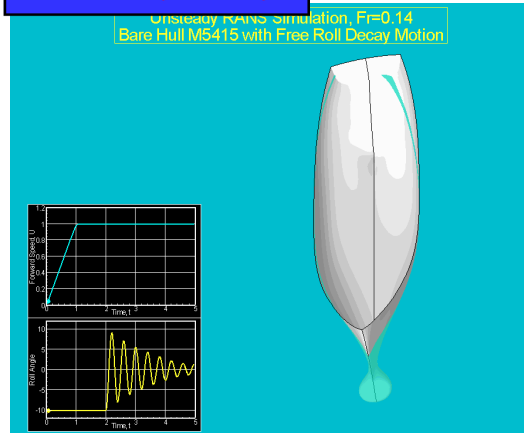
graphics by Fieldview



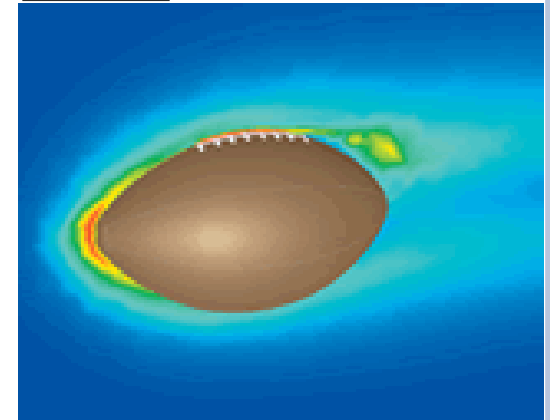
ОБЛАСТИ ПРИМЕНЕНИЯ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ ГИДРОДИНАМИКИ

- Where is CFD used?
 - Aerospace
 - Automotive
 - Biomedical
 - Chemical Processing
 - HVAC
 - Hydraulics
 - **Marine**
 - **Oil & Gas**
 - **Power Generation**
 - **Sports**

Marine (movie)

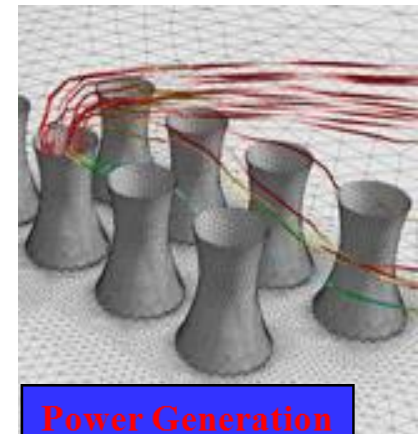


Sports



Oil & Gas

Flow of lubricating
mud over drill bit



Power Generation

Flow around cooling
towers



ИБРАЭ

ФИЗИЧЕСКИЕ ПЕРЕМЕННЫЕ И РАСЧЕТНЫЕ СЕТКИ.

СПЛОШНАЯ СРЕДА ХАРАКТЕРИЗУЕТСЯ ЛОКАЛЬНЫМИ ПЕРЕМЕННЫМИ:

ПЛОТНОСТЬЮ – $\rho = \rho(x, y, z, t)$

ТРЕМЯ КОМПОНЕНТАМИ СКОРОСТИ – $\vec{w} = \vec{w}(x, y, z, t)$

ДАВЛЕНИЕМ – $p = p(x, y, z, t)$

ТЕМПЕРАТУРОЙ – $T = T(x, y, z, t)$

КРОМЕ ТОГО, У НЕЕ МОГУТ БЫТЬ И ДРУГИЕ ФИЗИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ



ФИЗИЧЕСКИЕ ПЕРЕМЕННЫЕ И РАСЧЕТНЫЕ СЕТКИ.

Область решения задачи разбивается на большое число малых объемов (расчетных ячеек), без нахлестов и зазоров ее покрывающих. Их совокупность называется расчетной сеткой.

В расчетных ячейках выделяют следующие элементы:

***узлы** - каждый узел имеет уникальный номер и координаты;
ребра – уникальный номер и номера соединяемых узлов;
границы – уникальный номер, номера образующих ребер;
ячейки – уникальный номер и номера образующих граней;*

Построение расчетных сеток в сложных областях является трудоемкой математической задачей, от которой существенно зависит качество численного решения.



ФИЗИЧЕСКИЕ ПЕРЕМЕННЫЕ И РАСЧЕТНЫЕ СЕТКИ.

Требования к расчетным сеткам:

- расчетные ячейки должны быть выпуклыми фигурами и иметь максимально однородные объемы;*
- грани расчетных ячеек должны иметь максимально близкие площади;*
- ребра должны иметь максимально близкие длины и составлять между собой углы, максимально близкие к прямым;*
- сетка должна сгущаться в тех областях, где ожидаются большие градиенты в решении;*
- сгущение должно быть максимально плавным*



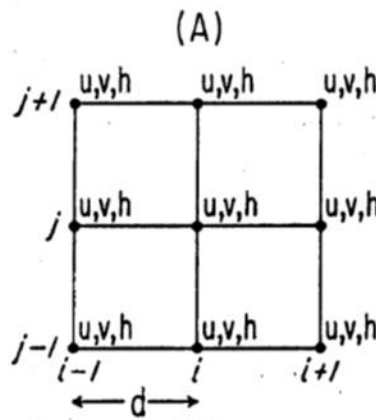
ФИЗИЧЕСКИЕ ПЕРЕМЕННЫЕ И РАСЧЕТНЫЕ СЕТКИ.

Классификация расчетных сеток.

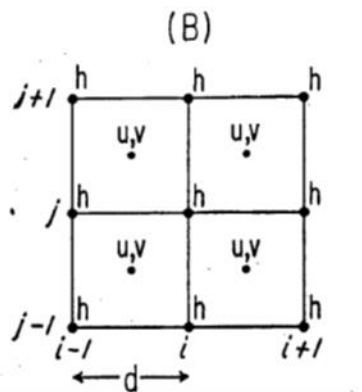
Физические поля задаются их точечными значениями, отнесенными к элементам расчетных ячеек – узлам, ребрам, граням и объемам.

Различают следующие типы сеток (A. Arakawa, 1973):

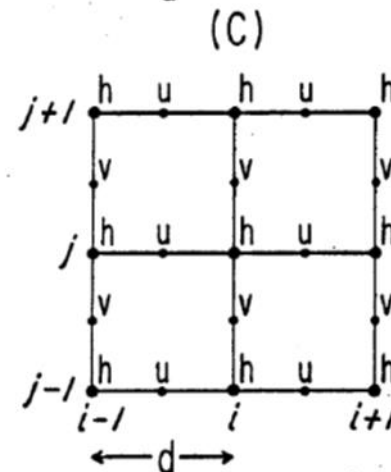
A – сетки



B – сетки



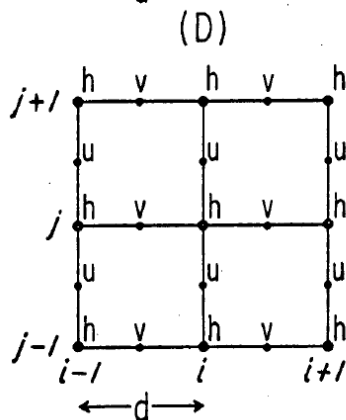
C – сетки



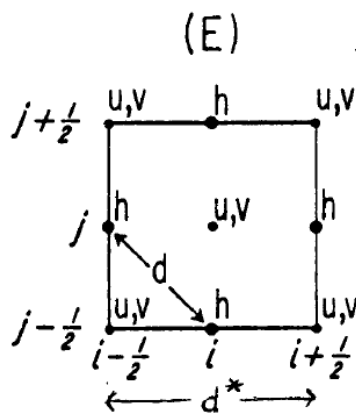
ФИЗИЧЕСКИЕ ПЕРЕМЕННЫЕ И РАСЧЕТНЫЕ СЕТКИ.

Классификация расчетных сеток.

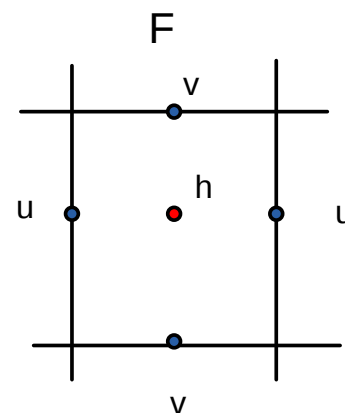
D – сетки



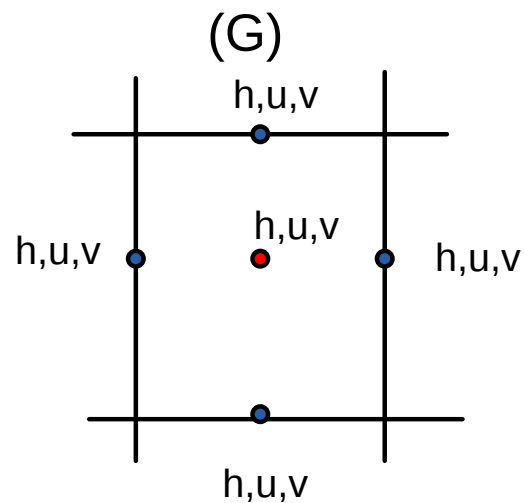
E – сетки



F – сетки



G – сетки





ИБРАЭ

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ

УРАВНЕНИЯ БАЛАНСА МАССЫ, ИМПУЛЬСА И ПОЛНОЙ ЭНЕРГИИ

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_G \rho \cdot dV + \oiint_{\partial G} \vec{J}_\rho \cdot \vec{n} \cdot dS = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_G \rho \cdot w_i \cdot dV + \oiint_{\partial G} J_{\rho w_i} \cdot \vec{n} \cdot dS = \iiint_G \rho F_i \cdot dV$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_G \rho \cdot E \cdot dV + \oiint_{\partial G} \vec{J}_E \cdot \vec{n} \cdot dS = \iiint_G \rho (F_i \cdot w_i + Q) dV$$

где

$$E = c_v \cdot T + 0.5 \cdot (\vec{w} \cdot \vec{w}); \quad p = P(\rho, T);$$

$$\vec{J}_\rho = \rho \cdot \vec{w}; \quad J_{\rho w_i} = \rho w_i \cdot \vec{w}; \quad \vec{J}_E = \rho \cdot E \cdot \vec{w};$$



ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ФОРМА ЗАКОНОВ СОХРАНЕНИЯ.

ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ В МЕХАНИКЕ СПЛОШНЫХ СРЕД. УРАВНЕНИЯ ЭЙЛЕРА.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \cdot \vec{J}_{\rho} = 0$$

$$\frac{\partial \rho w_i}{\partial t} + \operatorname{div} \cdot \vec{J}_{\rho w_i} = \rho F_i$$

$$\frac{\partial \rho E}{\partial t} + \operatorname{div} \cdot \vec{J}_E = \rho (F_i \cdot w_i + Q)$$



ЧТО ТАКОЕ «ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ ГИДРОДИНАМИКА»?

УРАВНЕНИЯ ЭЙЛЕРА

$$\vec{J}_\rho = \rho \cdot \vec{w}; \quad \vec{J}_{\rho w_i} = \rho w_i \cdot w_j + \delta_{i,j} \cdot P; \quad \vec{J}_E = \rho \cdot \vec{w} \cdot E + \vec{w} \cdot P$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{w}) = 0$$

$$\frac{\partial \rho w_i}{\partial t} + \operatorname{div} \cdot (\rho \vec{w} \cdot w_i) + \operatorname{grad}(P) = 0$$

$$\frac{\partial \rho E}{\partial t} + \operatorname{div} \cdot (\rho E \vec{w} + P \vec{w}) = 0$$

$$E = \frac{w_i \cdot w_i}{2} + \varepsilon; \quad P = (\gamma - 1) \cdot \rho \cdot \varepsilon$$



ЧТО ТАКОЕ «ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ ГИДРОДИНАМИКА»?

УРАВНЕНИЯ НАВЬЕ-СТОКСА

$$\vec{J}_\rho = \rho \cdot \vec{w}; \quad \vec{J}_{\rho w_i} = \rho w_i \cdot w_j + \tau_{i,j}; \quad \vec{J}_E = \rho \cdot \vec{w} \cdot E + w_j \cdot \tau_{i,j} + \vec{q}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{w}) = 0$$

$$\frac{\partial \rho w_i}{\partial t} + \operatorname{div} \cdot (\rho \vec{w} \cdot w_i) + \operatorname{grad}(P) = \frac{\partial \tau_{i,j}}{\partial x_j}$$

$$\frac{\partial \rho E}{\partial t} + \operatorname{div} \cdot (\rho E \vec{w} + P \vec{w}) = \frac{\partial}{\partial x_j} \cdot (\tau_{i,j} \cdot w_i) + \frac{\partial q_i}{\partial x_i}$$

$$\tau_{i,j} = P - \sigma_{i,j}; \quad q_i = -\mu \cdot \frac{\partial T}{\partial x_i}; \quad \varepsilon = c_v \cdot T$$



ИБРАЭ

ЧТО ТАКОЕ «ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ ГИДРОДИНАМИКА»?

«ПРОСТАЯ» ФОРМА ЗАПИСИ РАВНЕНИЙ ЭЙЛЕРА

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + w_1 \frac{\partial \rho}{\partial x_1} + w_2 \frac{\partial \rho}{\partial x_2} + w_3 \frac{\partial \rho}{\partial x_3} + \rho \left(\frac{\partial w_1}{\partial x_1} + \frac{\partial w_2}{\partial x_2} + \frac{\partial w_3}{\partial x_3} \right) = 0$$

$$\frac{\partial w_1}{\partial t} + w_1 \frac{\partial w_1}{\partial x_1} + w_2 \frac{\partial w_1}{\partial x_2} + w_3 \frac{\partial w_1}{\partial x_3} + \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial P}{\partial x_1} = 0$$

$$\frac{\partial w_2}{\partial t} + w_1 \frac{\partial w_2}{\partial x_1} + w_2 \frac{\partial w_2}{\partial x_2} + w_3 \frac{\partial w_2}{\partial x_3} + \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial P}{\partial x_2} = 0$$

$$\frac{\partial w_3}{\partial t} + w_1 \frac{\partial w_3}{\partial x_1} + w_2 \frac{\partial w_3}{\partial x_2} + w_3 \frac{\partial w_3}{\partial x_3} + \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial P}{\partial x_3} = 0$$

$$\frac{\partial P}{\partial t} + w_1 \frac{\partial P}{\partial x_1} + w_2 \frac{\partial P}{\partial x_2} + w_3 \frac{\partial P}{\partial x_3} + c_2 \rho \left(\frac{\partial w_1}{\partial x_1} + \frac{\partial w_2}{\partial x_2} + \frac{\partial w_3}{\partial x_3} \right)$$



ЧТО ТАКОЕ «ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ ГИДРОДИНАМИКА»?

МАТРИЧНАЯ ФОРМА ЗАПИСИ УРАВНЕНИЙ ЭЙЛЕРА

$$\vec{\phi} = (\rho, w_1, w_2, w_3, P)^T; \quad \frac{\partial \vec{\phi}}{\partial t} + \mathbf{A}_1 \cdot \frac{\partial \vec{\phi}}{\partial x_1} + \mathbf{A}_2 \cdot \frac{\partial \vec{\phi}}{\partial x_2} + \mathbf{A}_3 \cdot \frac{\partial \vec{\phi}}{\partial x_3} = 0$$

$$\mathbf{A}_1 = \begin{pmatrix} w_1 & \rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & w_1 & 0 & 0 & \rho^{-1} \\ 0 & 0 & w_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & w_1 & 0 \\ 0 & \rho c^2 & 0 & 0 & w_1 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{A}_2 = \begin{pmatrix} w_2 & 0 & \rho & 0 & 0 \\ 0 & w_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & w_2 & 0 & \rho^{-1} \\ 0 & 0 & 0 & w_2 & 0 \\ 0 & 0 & \rho c^2 & 0 & w_2 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{A}_3 = \begin{pmatrix} w_3 & 0 & 0 & \rho & 0 \\ 0 & w_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & w_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & w_3 & \rho^{-1} \\ 0 & 0 & 0 & \rho c^2 & w_3 \end{pmatrix};$$

$$\frac{\partial \vec{\psi}}{\partial t} + \mathbf{A} \cdot \frac{\partial \vec{\psi}}{\partial \vec{l}} = \vec{Q}; \quad \vec{\eta}_k^T \cdot \mathbf{A} = \lambda_k \cdot \vec{\eta}_k^T; \quad \|\mathbf{A} - \lambda_k \cdot \mathbf{E}\| = 0;$$

$$\mathbf{\Omega} = (\vec{\eta}_1^T, \vec{\eta}_2^T, \vec{\eta}_3^T, \vec{\eta}_4^T, \vec{\eta}_5^T)^T; \quad \mathbf{\Omega} \cdot \left(\frac{\partial \vec{\psi}}{\partial t} + \mathbf{A} \cdot \frac{\partial \vec{\psi}}{\partial \vec{l}} \right) = \mathbf{\Omega} \cdot \vec{Q} = \vec{F}$$



ЧТО ТАКОЕ «ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ ГИДРОДИНАМИКА»?

ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКАЯ ФОРМА УРАВНЕНИЙ ЭЙЛЕРА

$$\sum_{m=1}^5 (\eta_k)_m \left(\frac{\partial \psi_m}{\partial t} + \lambda_m \cdot \frac{\partial \psi_m}{\partial \vec{l}} \right) = F_k; \quad k = 1, \dots, 5$$

ДЛЯ ОДНОМЕРНЫХ УРАВНЕНИЙ ЭЙЛЕРА

$$\left\{ \frac{\partial u}{\partial t} + (u + c) \cdot \frac{\partial u}{\partial x} \right\} + \frac{1}{\rho c} \cdot \left\{ \frac{\partial P}{\partial t} + (u + c) \cdot \frac{\partial P}{\partial x} \right\} = 0;$$

$$\left\{ \frac{\partial u}{\partial t} + (u - c) \cdot \frac{\partial u}{\partial x} \right\} - \frac{1}{\rho c} \cdot \left\{ \frac{\partial P}{\partial t} + (u - c) \cdot \frac{\partial P}{\partial x} \right\} = 0;$$

$$\left\{ \frac{\partial P}{\partial t} + u \cdot \frac{\partial P}{\partial x} \right\} - c^2 \cdot \left\{ \frac{\partial \rho}{\partial t} + u \cdot \frac{\partial \rho}{\partial x} \right\} = 0;$$



ЧТО ТАКОЕ «ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ ГИДРОДИНАМИКА»?

СИСТЕМА УРАВНЕНИЙ «ОБОБЩЕННОЙ» ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ ГИДРОДИНАМИКИ

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial t} + \frac{\partial J_{i,j}(\vec{\varphi})}{\partial x_j} = \alpha \cdot L_i(\vec{\varphi}, \vec{x}) + F_i(\vec{\varphi}, \vec{x});$$
$$i = 1, \dots, m; \quad j = 1, 2, 3;$$

φ_i - вектор состояния следы

$J_{i,j}$ - обобщенные потоки

α - малый параметр

L_i - эллиптический оператор

Условие гиперболичности :

$$A_{i,k}(\bar{\varphi}, \bar{\omega}) = \omega_j \cdot \frac{\partial J_{i,j}}{\partial \varphi_k}; \quad l_i \cdot A_{i,k} = \lambda \cdot l_i; \quad \text{Im}(\lambda_k) \equiv 0;$$





Что такое «ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ ГИДРОДИНАМИКА»?

К вычислительной гидродинамике относятся:

- Уравнения Максвелла
- Линейная и нелинейная акустика
- Линейная и нелинейная оптика
- Магнитная гидродинамика
- Динамические уравнения линейной и нелинейной упругости
- Кинетическое уравнение Больцмана
- Уравнения Лаврета-Бакли (подземная гидродинамика)
- Уравнения переноса частиц и излучения
- Уравнения Навье-Стокса
- Уравнения Эйлера
- Многокомпонентная и многофазная газовая динамика
- Уравнения конвекции – диффузии при доминирующей конвекции
- Задачи океанологии и динамики атмосферы
- Уравнения Ландау-Лифшица (микрофлюидика)
- Молекулярная динамика





ХАРАКТЕРНЫЕ ОСОБЕННОСТИ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ ГИДРОДИНАМИКИ

Возможность существования сильных и слабых разрывов, которые могут образовываться, трансформироваться и исчезать в процессе решения.

Временная обратимость решения систем гиперболических уравнений на течениях, в которых характеристики одного семейства не пересекаются.

Одновременное существование особенностей с большим разбросом характерных пространственных и временных масштабов (многомасштабность).

Взаимное влияние различных по своей физической природе многомасштабных процессов в «физической гидродинамике» (мультифизичность)





ИСТОРИЧЕСКИЕ ВЕХИ В РАЗВИТИИ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ ГИДРОДИНАМИКИ

Одномерные ударноволновые задачи

Прикладная проблема – расчет мощности ядерного заряда.

Консервативные разностные схемы

Предложение А.Н. Тихонова численно решать одномерные уравнения Эйлера в лагранжевых переменных и сферических координатах с учетом переноса излучения в приближении лучистой теплопроводности. образование ИПМ АН СССР.

Формулировка концепции расчетов: принцип консервативности – использование в качестве основы дивергентной формы уравнений Эйлера, искусственная вязкость, однородные разностные схемы; неявные, безусловно устойчивые алгоритмы, метод прогонки, принцип полной консервативности, параллельные вычисления, понятие вычислительного эксперимента.

Метод характеристик

Жуков А.И., Семендяев К.И. и Гельфанд И.М. разработали «метод характеристик», базирующийся на характеристической форме уравнений Эйлера. Автоматическая подстройка расчетной сетки к особенностям решения, аномально высокая точности в областях гладкости течения, точное вычисление положения ударных волн на основе решения задачи Римана о распаде разрыва.

Объединение достоинств консервативных и характеристических методов – нерешенная задача XX века.



ИСТОРИЧЕСКИЕ ВЕХИ В РАЗВИТИИ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ ГИДРОДИНАМИКИ

Двумерные алгоритмы в лагранжевых и смешанных эйлерово – лагранжевых (СЭЛ) переменных

Прикладная проблема – расчет пределов достижимой мощности ядерного заряда, лазерный термоядерный синтез (ЛТС)

Консервативные разностные схемы

Дальнейшее развитие лагранжевых алгоритмов, переход к СЭЛ – переменным, задачи со свободной границей, различные варианты «метода частиц».

Формулировка и реализация общих принципов: разработка вариационного подхода к построению разностных схем для уравнений гиперболического типа в лагранжевых переменных на базе принципа наименьшего действия Гамильтона – Остроградского (Головизнин В.М., Самарский А.А., Фаворский А.П.) «Метод опорных операторов» (Фаворский А.П., Тишкин В.Ф., Шашков М.Ю.). «Метод каскадной аппроксимации конвективных потоков в СЭЛ – переменных», «экономичные методы решения уравнений параболического типа на косоугольных расчетных сетках» (Головизнин В.М.), метод частиц конечного Размера (Фаворский А.П., Таран М.Д.), «метод свободных частиц» (Фаворский А.П., Шашков М.Ю.), «метод крупных частиц» (Белоцерковский О.М., Давыдов Ю.М.)

Метод характеристик

Обобщение метода характеристик на двумерные задачи – сеточно – характеристические численные методы (Магомедов К.М., Холодов А.С.)

Объединение достоинств консервативных и характеристических методов – нерешенная задача XX века.



ИСТОРИЧЕСКИЕ ВЕХИ В РАЗВИТИИ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ ГИДРОДИНАМИКИ

Двумерные алгоритмы в эйлеровых переменных

Прикладная проблема – задачи внешней и внутренней аэродинамики.

Консервативные разностные схемы

Основное направление развития – улучшение монотонности численного решения и уменьшение сеточной (аппроксимационной) вязкости

Формулировка и реализация общих принципов: вычисление конвективных потоков на основе точного или приближенного решения задачи о распаде произвольного разрыва (методы «Годуновского типа») подсеточное восполнение (Годунов С.К., Колган В.П., Родионов А.В.), нелинейная коррекция потоков, алгоритмы высокой разрешающей способности -TVD, TVB, ENO, WENO, MUSCL – схемы.

Метод характеристик

Разработка т.н. «полулагранжевых алгоритмов», в основном для задач динамики атмосферы (М.А. Толстых)

Объединение достоинств консервативных и характеристических методов – нерешенная задача XX века.



СОВРЕМЕННОЕ СОСТОЯНИЕ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ ГИДРОДИНАМИКИ И СУЩЕСТВУЮЩИЕ ПРОБЛЕМЫ.

Бурное развитие индустриальной математики - широкое внедрение расчетных кодов в конструкторские и проектные организации.

Развитие инфраструктуры индустриальной математики – совершенствование алгоритмов и программ построения расчетных сеток и графической обработки результатов расчетов, переход к универсальным форматам хранения расчетных данных.

Наращивание параллелизма в расчетах – переход на многопроцессорные вычислительные комплексы с графическими ускорителями.

Доминирование зарубежных коммерческих программ, удовлетворяющих типовые запросы пользователей.

Превращение пользователей в типичных «операторов приложений», думающих на «кнопочном уровне».

Ужесточение требований к качеству математического моделирования – требование гарантированной предсказательной способности расчетов.



**РАЗРАБОТКА АЛГОРИТМОВ НОВОГО
ПОКОЛЕНИЯ В ОБЛАСТИ
ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ
ГИДРОДИНАМИКИ – ОСНОВНАЯ
ЗАДАЧА СОВРЕМЕННОЙ
ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ**



ИБРАЭ

**СПАСИБО ЗА
ВНИМАНИЕ!**



Stages of generalization

One-dimensional transport equation

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + c \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0 ; c = \text{const} > 0 ; \quad t \in [0, T] ; x \in [0, 2\pi] ;$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\partial F(\varphi)}{\partial x} = 0 ; c = \text{const} > 0 ; \quad t \in [0, T] ; x \in [0, 2\pi] ;$$

Multi-dimensional transport equation

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\partial u_i \cdot \varphi}{\partial x_i} = 0 ; \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 ; \quad t \in [0, T] ; x_i \in [0, 2\pi] ;$$

One-dimensional hyperbolic systems of conservation laws

$$\frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{F}(\vec{\varphi})}{\partial x} = 0 ; c = \text{const} > 0 ; \quad t \in [0, T] ; x \in [0, 2\pi] ;$$

$$A_{i,k}(\vec{\varphi}) = \frac{\partial F_i}{\partial \varphi_k} ; \quad l_i \cdot A_{i,k} = \lambda \cdot l_i ; \quad \text{Im}(\lambda_k) \equiv 0 ;$$

Multidimensional hyperbolic systems of conservation laws

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial t} + \frac{\partial J_{i,j}(\vec{\varphi})}{\partial x_j} = L_i(\varepsilon, \vec{\varphi}, \vec{x}) ; \quad i = 1, \dots, m ; j = 1, 2, 3 ;$$

$$A_{i,k}(\vec{\varphi}, \vec{\omega}) = \omega_j \cdot \frac{\partial J_{i,j}}{\partial \varphi_k} ; \quad l_i \cdot A_{i,k} = \lambda \cdot l_i ; \quad \text{Im}(\lambda_k) \equiv 0 ;$$



Интерполяционно – характеристический подход

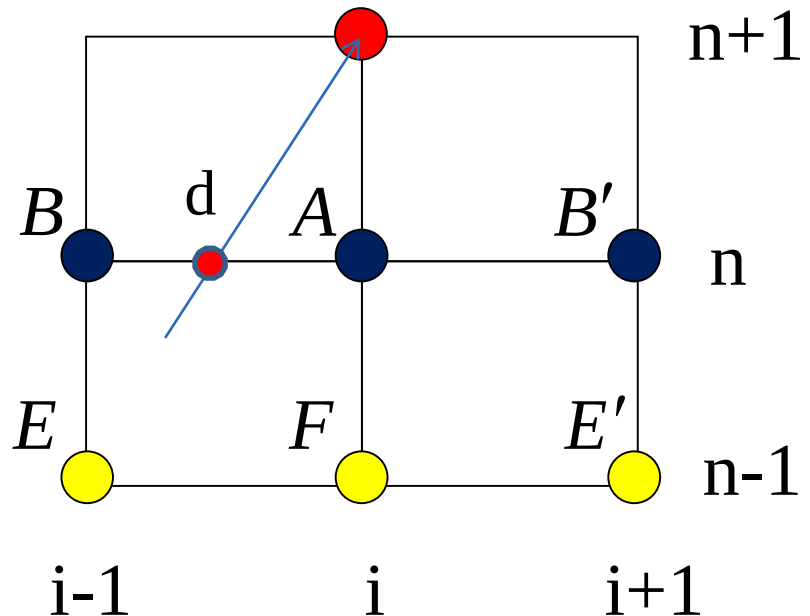
$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + c \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0$$

Схема Лакса - Вендроффа

$$P_B(x) = \frac{(x_A - x) \cdot (x_{B'} - x)}{(x_A - x_B) \cdot (x_{B'} - x_B)}$$

$$P_A(x) = \frac{(x_B - x) \cdot (x_{B'} - x)}{(x_B - x_A) \cdot (x_{B'} - x_A)}$$

$$P_{B'}(x) = \frac{(x_A - x) \cdot (x_B - x)}{(x_A - x_{B'}) \cdot (x_B - x_{B'})}$$



$$\varphi_i^{n+1} = P_B(-r) \cdot \varphi_B + P_A(-r) \cdot \varphi_A + P_{B'}(-r) \cdot \varphi_{B'}; \quad r = c \cdot \tau / h$$





Интерполяционно – характеристический алгоритм

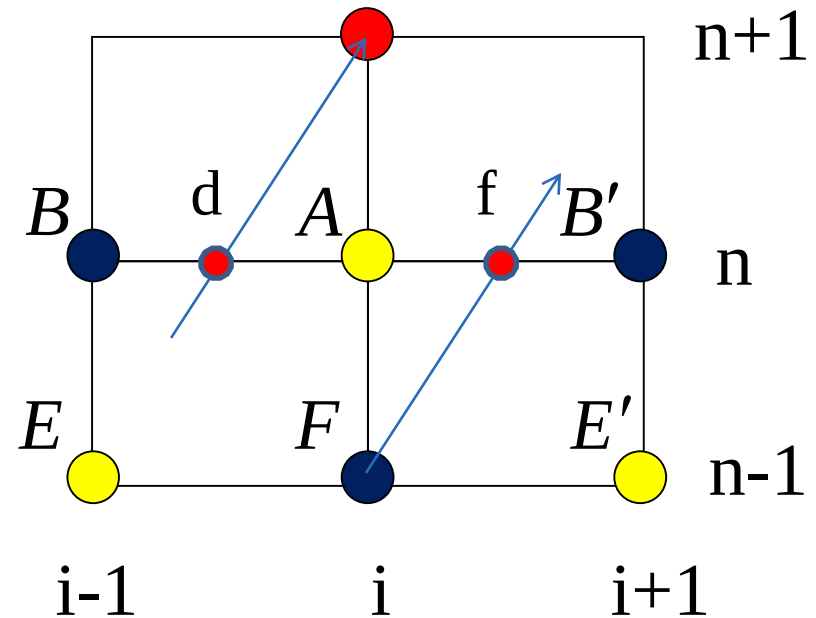
$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + c \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0$$

Схема Крест

$$P_B(x) = \frac{(x_A - x) \cdot (x_{B'} - x)}{(x_A - x_B) \cdot (x_{B'} - x_B)}$$

$$P_f(x) = \frac{(x_B - x) \cdot (x_{B'} - x)}{(x_B - x_f) \cdot (x_{B'} - x_f)}$$

$$P_{B'}(x) = \frac{(x_A - x) \cdot (x_B - x)}{(x_A - x_{B'}) \cdot (x_B - x_{B'})}$$



$$\varphi_i^{n+1} = P_B(-r) \cdot \varphi_B + P_A(-r) \cdot \varphi_A + P_f(-r) \cdot \varphi_F; \quad r = c \cdot \tau / h$$





ИБРАЭ

Амплитудные и фазовые ошибки

Будем искать частные решения в виде:

$$\varphi_j^{(n)} = q^n \cdot \exp(-i \cdot khj) ; \quad q = \exp(i\omega\tau); \quad kh \in [0, 2\pi]$$

Модуль перехода (диссипативная поверхность)

как функция двух аргументов

$$(0 \leq r \leq 1); (0 \leq kh \leq 2\pi);$$

$$|q_1| = \text{abs}[q_1(kh, r)] ; \quad |q_2| = \text{abs}[q_2(kh, r)] 1 ;$$

$$r \in [0, 1] ; \quad kh \in [0, 2\pi] ;$$

Относительный набег фазы (дисперсионная поверхность)

как функция двух аргументов

$$(0 \leq r \leq 1); (0 \leq kh \leq 2\pi);$$

$$\gamma_1(kh, r) = \frac{1}{r \cdot kh} \arctg \{ \text{Im}(q_1) / \text{Re}(q_1) \} ;$$

$$\gamma_2(kh, r) = \frac{1}{r \cdot kh} \arctg \{ \text{Im}(q_2) / \text{Re}(q_2) \} ;$$



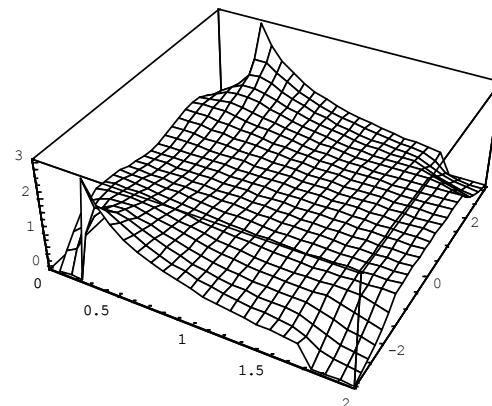
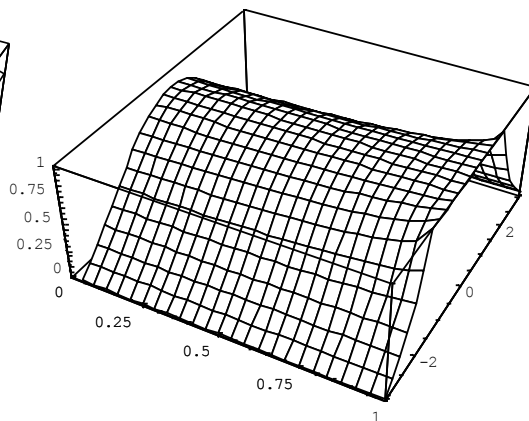
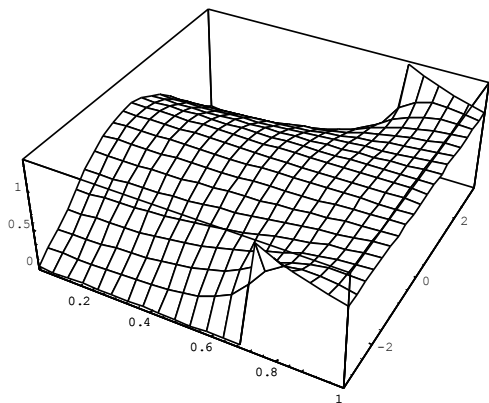
Дисперсионные и диссипативные свойства

Лакса-Вендроффа

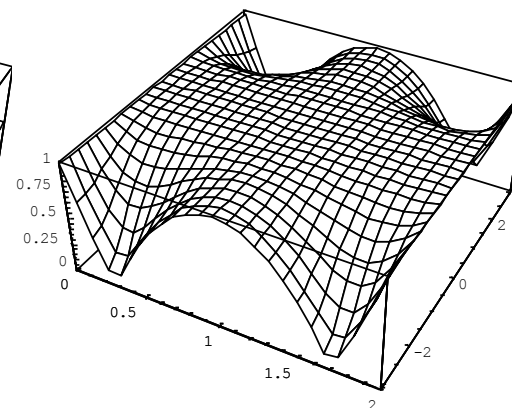
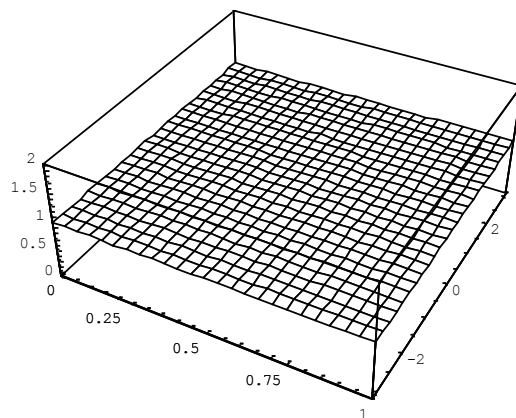
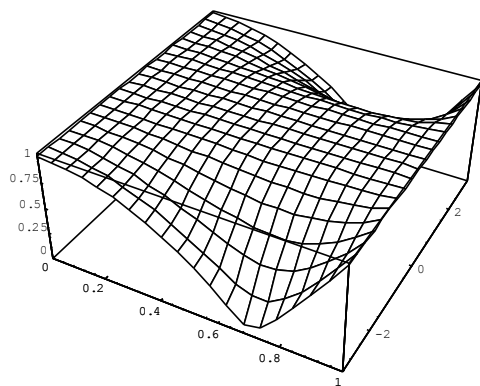
«Крест»

Ван - Леер

Дисперсия

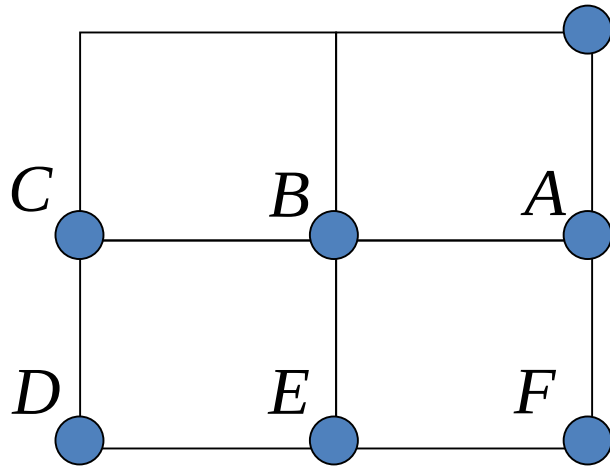


Диссипация



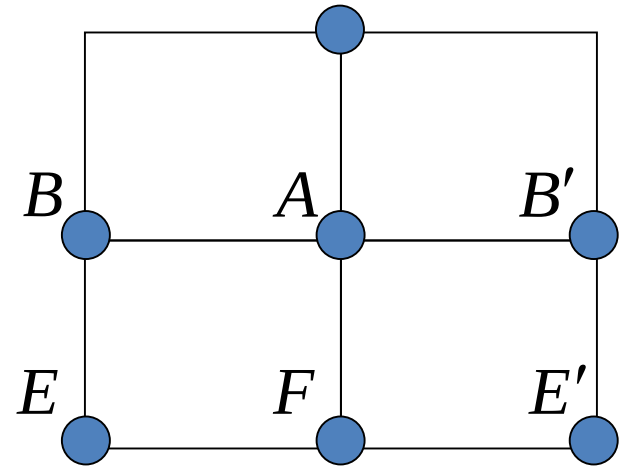


Классификация и общее число явных схем на компактных шаблонах



$ABC, ABD, ABE, ABF, BCD, BCE, BDE, BEF, BDF, AED, AFE, AED, AEC$

13 схем



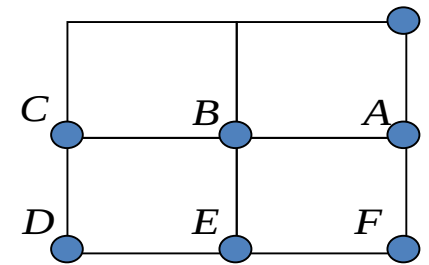
$BAB', BAE', BFE', BFB', EAE', EAB'$

6 схем

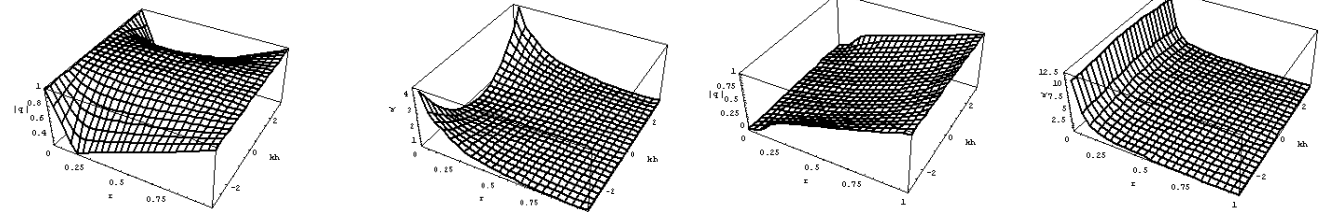




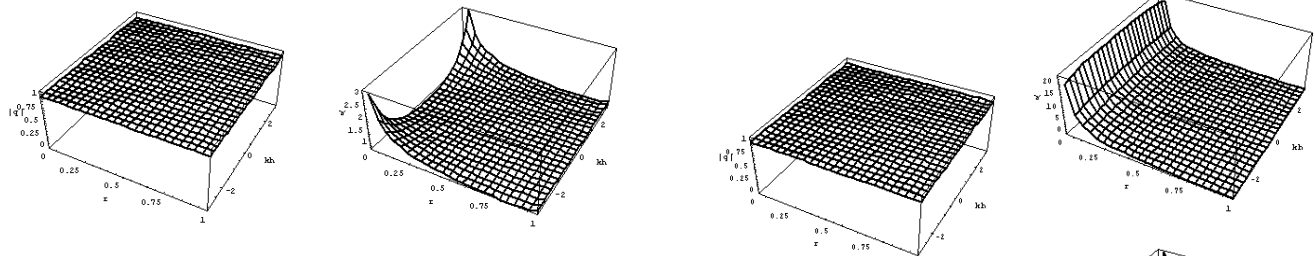
Диссипативные и дисперсионные свойства



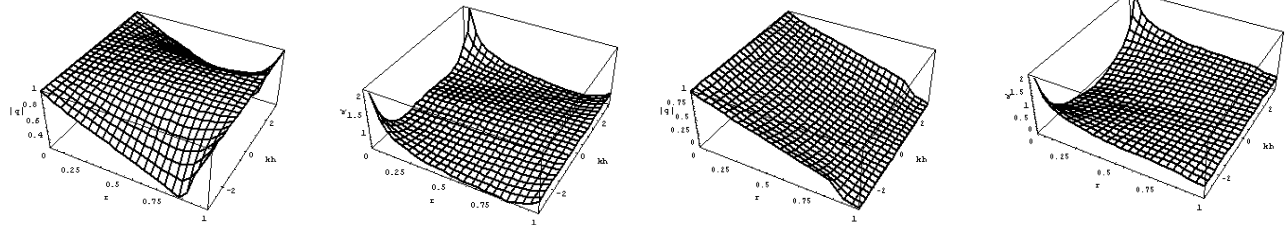
ABD



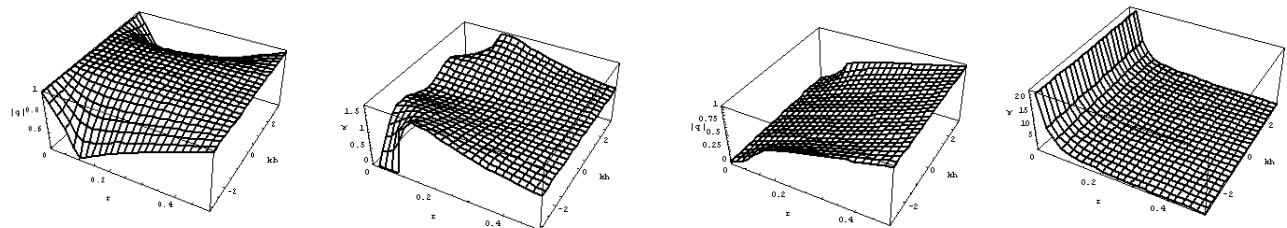
ABE



ABF



*ACE**

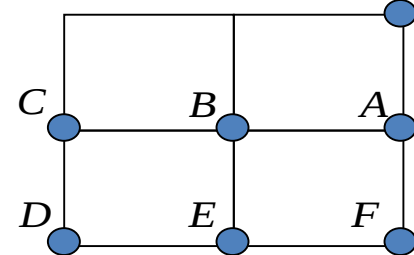


* $-[0; 0.5]$

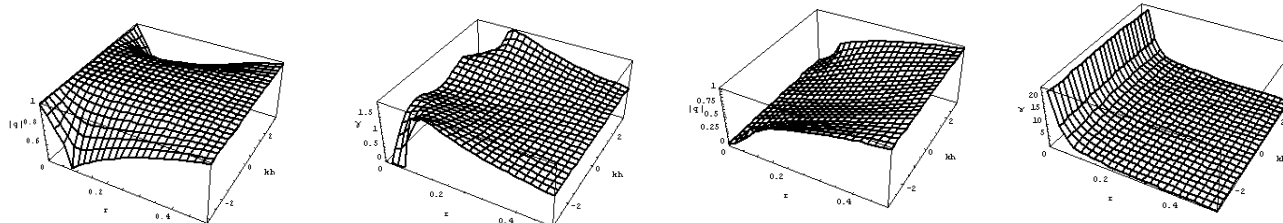




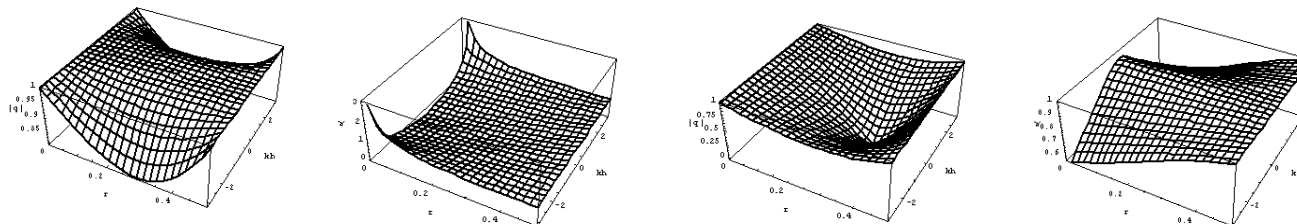
Диссипативные и дисперсионные свойства



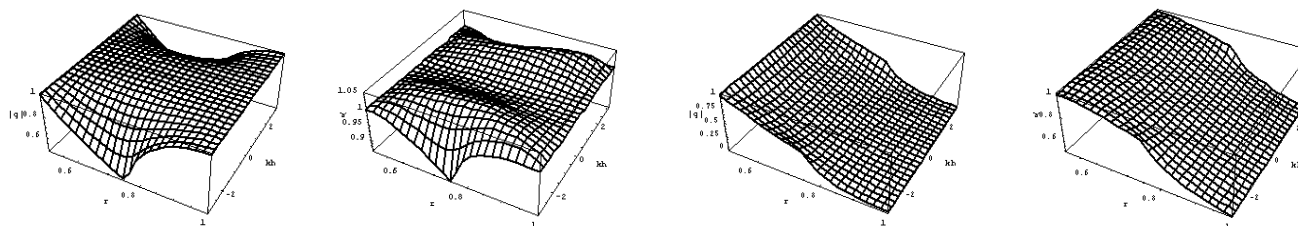
ADE^*



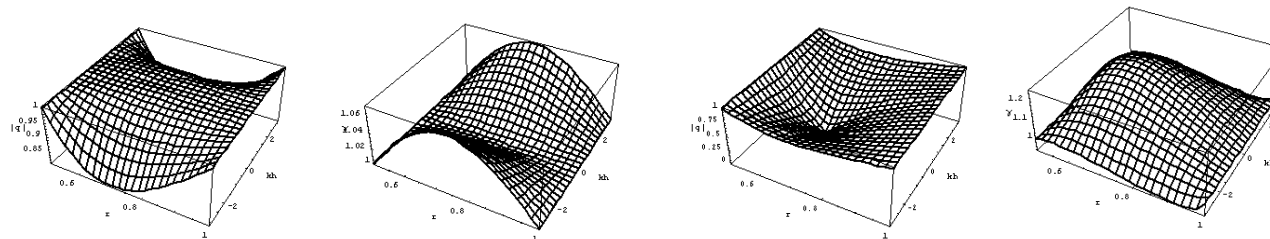
AEF^*



BCE^*

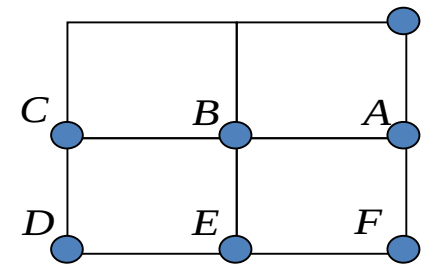


BDE^*

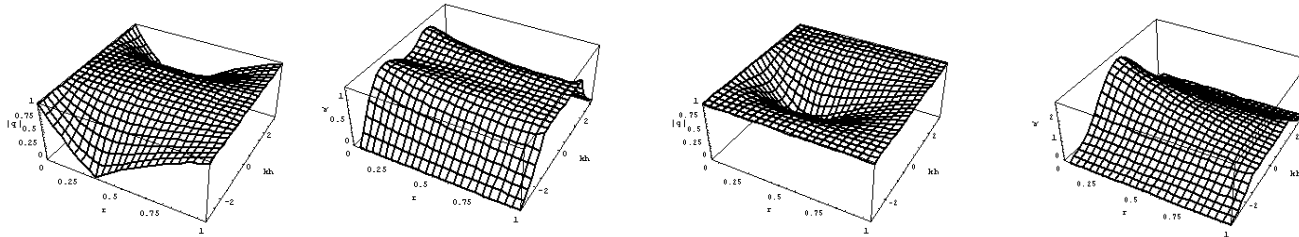




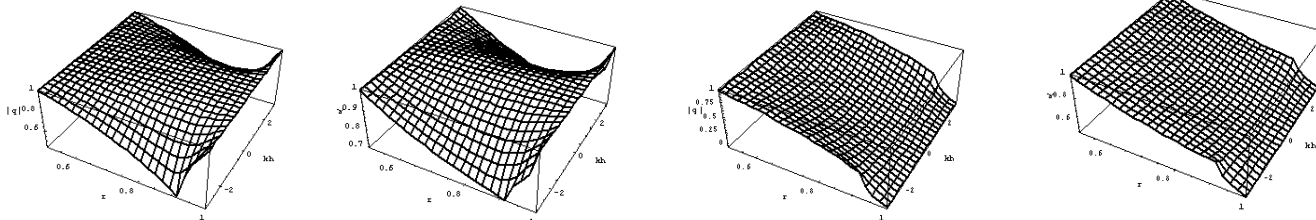
Диссипативные и дисперсионные свойства



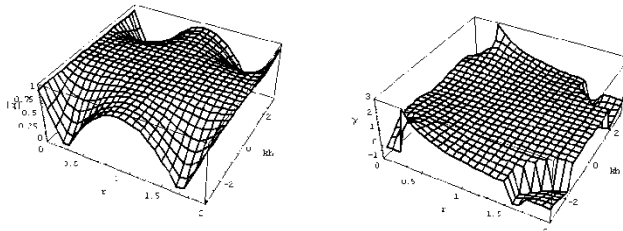
BDF



BEF^*



ABC^{**}



$** - [0; 2]$

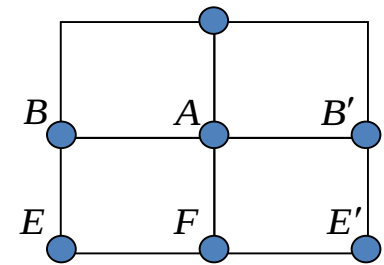
$* - [0.5; 1]$

Схемы BCD, BCF, EFB' - неустойчивы

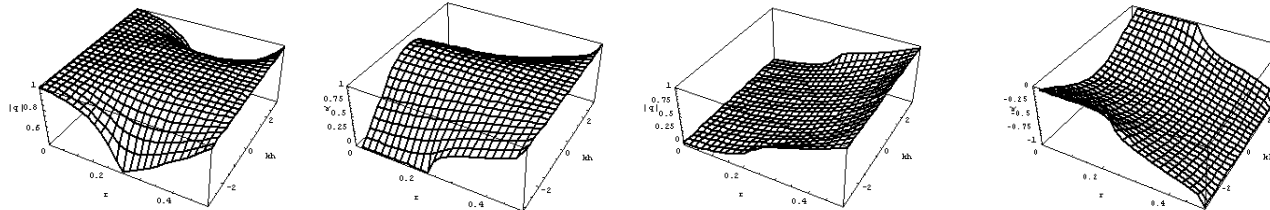




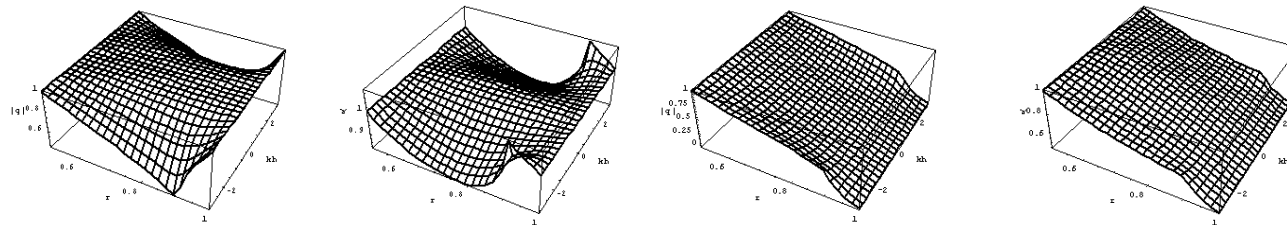
Диссипативные и дисперсионные свойства



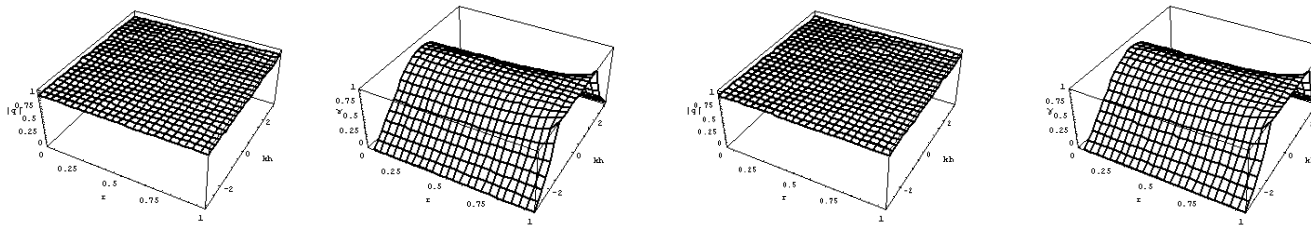
$B'AE^*$



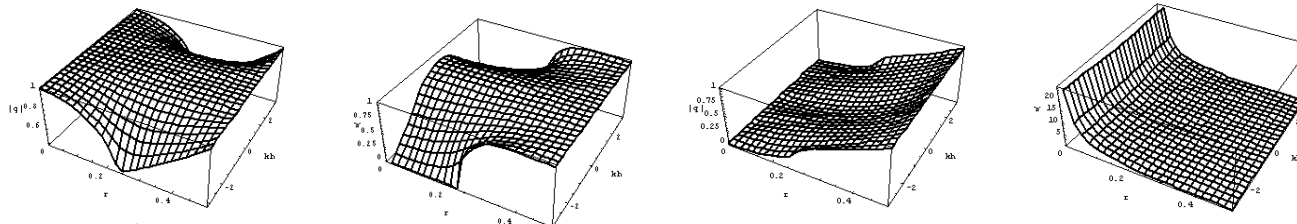
$B'BE^{**}$



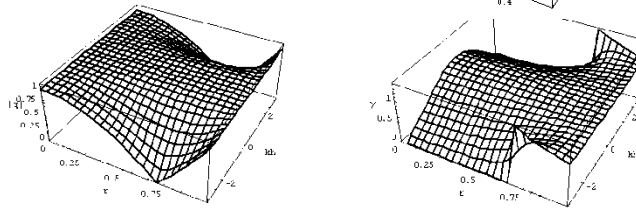
$B'BF$



AEE'^*



$B'AB$



$*-[0;0.5]$





Интерполяционно – характеристический
подход

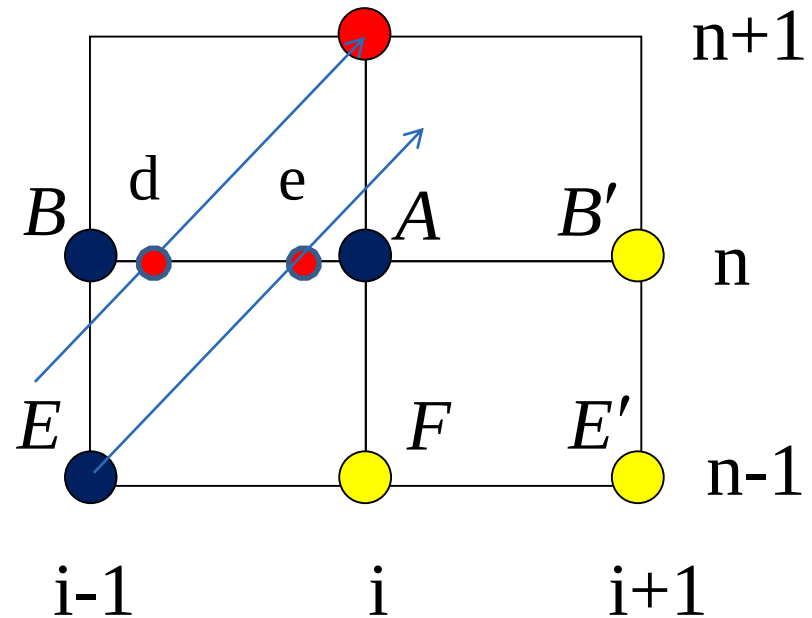
$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + c \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0$$

Схема Айзерлиса (КАБАРЕ)

$$P_B(x) = \frac{(x_A - x) \cdot (x_e - x)}{(x_A - x_B) \cdot (x_e - x_B)}$$

$$P_e(x) = \frac{(x_B - x) \cdot (x_A - x)}{(x_B - x_e) \cdot (x_A - x_e)}$$

$$P_A(x) = \frac{(x_e - x) \cdot (x_B - x)}{(x_e - x_A) \cdot (x_B - x_A)}$$



$$\varphi_i^{n+1} = P_B(-r) \cdot \varphi_B + P_A(-r) \cdot \varphi_A + P_e(-r) \cdot \varphi_E; \quad r = c \cdot \tau / h$$

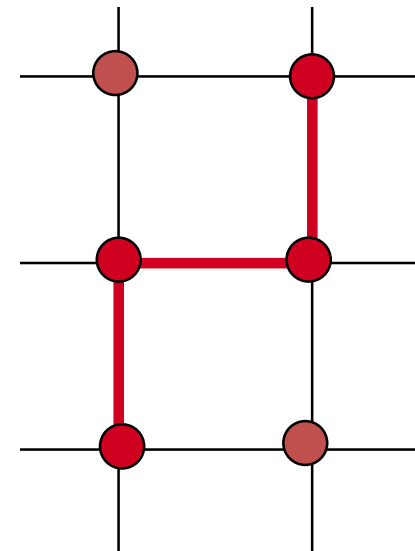
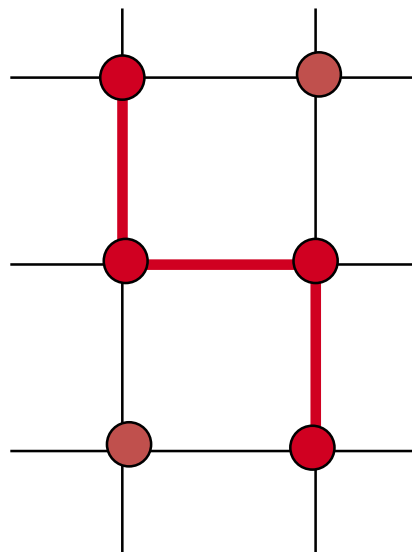




ИБРАЭ

Схема Айзерлиса (КАБАРЕ)

$$\frac{1}{2} \left\{ \frac{\varphi_{i+1}^{n+1} - \varphi_{i+1}^n}{\tau} + \frac{\varphi_i^n - \varphi_i^{n-1}}{\tau} \right\} + c \cdot \frac{\varphi_{i+1}^n - \varphi_i^n}{h} = 0$$



$$\frac{1}{2} \left\{ \frac{\psi_i^{n+1} - \psi_i^n}{\tau} + \frac{\psi_{i+1}^n - \psi_{i+1}^{n-1}}{\tau} \right\} - c \cdot \frac{\psi_{i+1}^n - \psi_i^n}{h} = 0$$

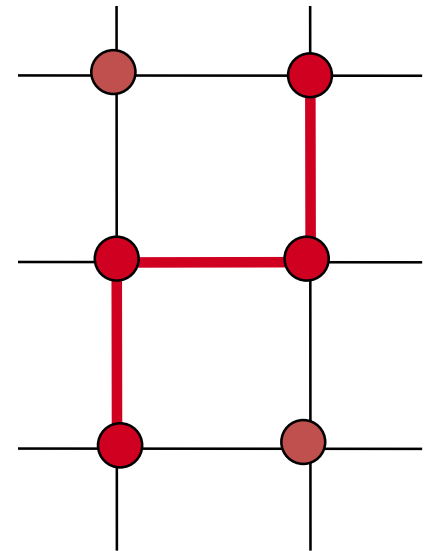
Головизнин В.М., Самарский А.А. 1998г.





“Compact Accurately Boundary Adjusting high-
REsolution Technique for Fluid Dynamics

Computational stencil of the forerunner of
CABARET scheme



Another reason to call it CABARET...



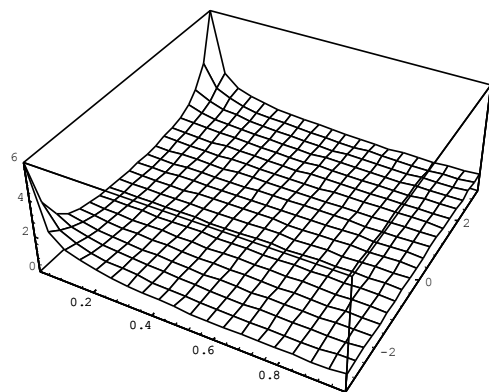


Дисперсионные и диссипативные поверхности

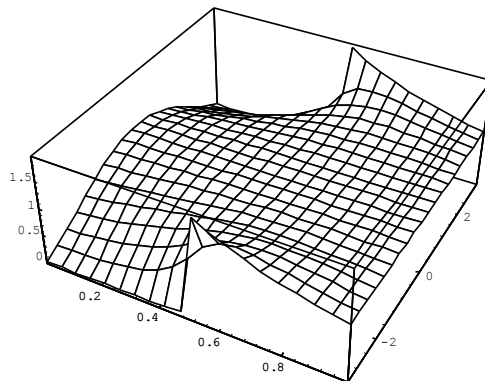
ИБРАЭ

Дисперсия

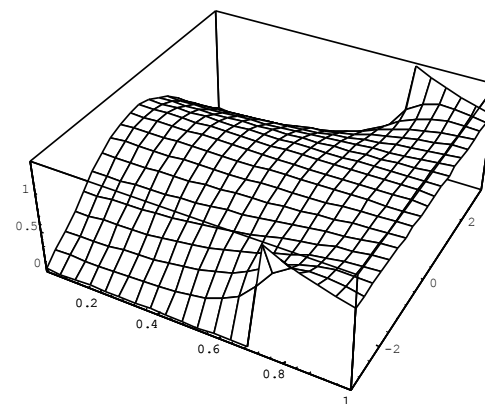
«Кабаре»



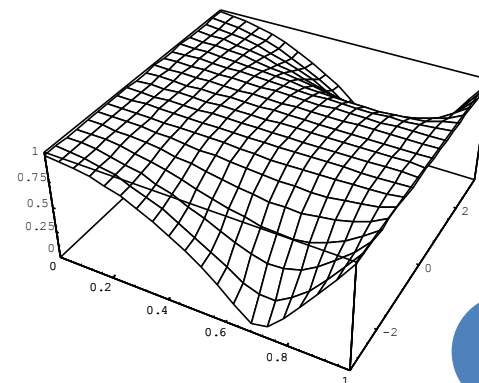
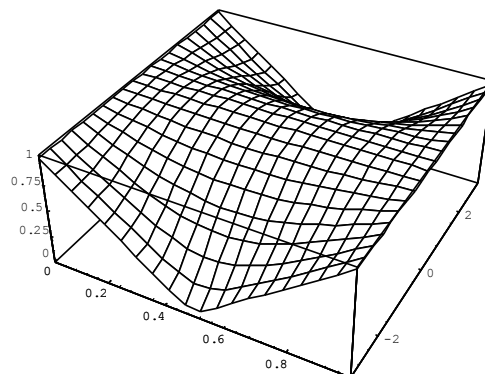
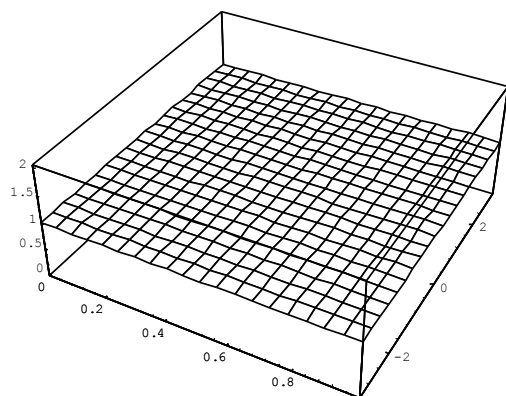
«Уголок»



Лакса-Вендроффа



Диссипация



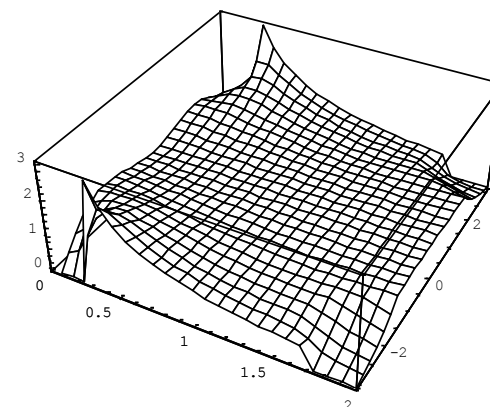
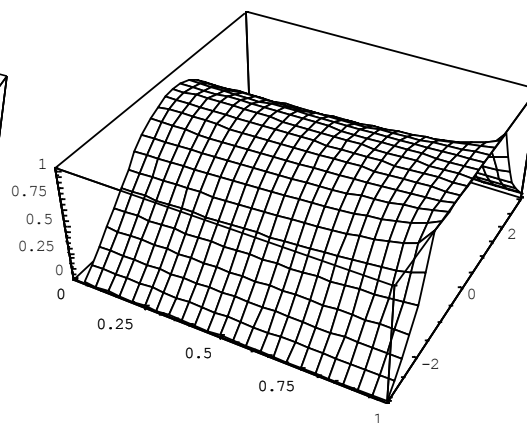
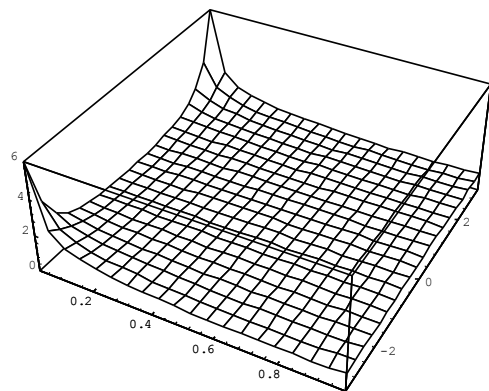
Дисперсионные и диссипативные свойства

«Кабаре»

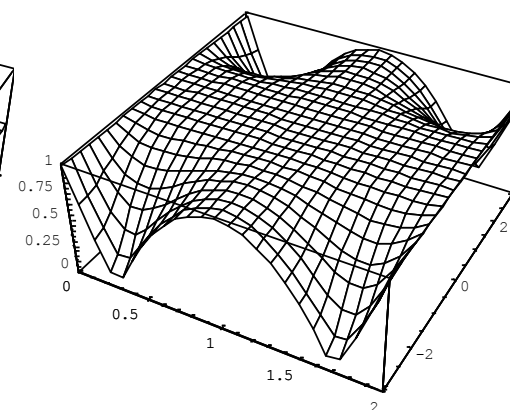
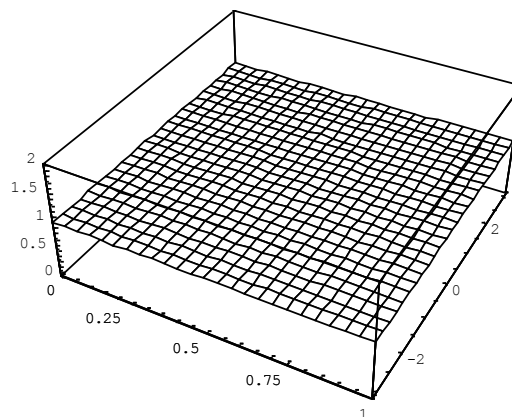
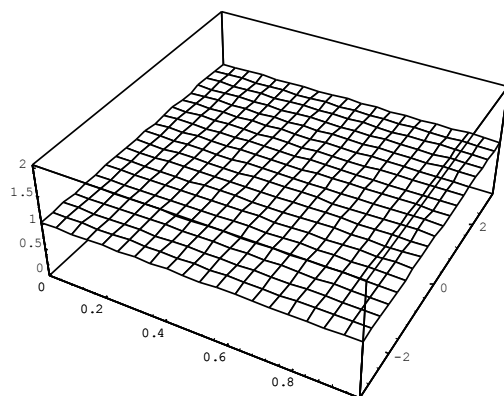
«Крест»

Ван - Леер

Дисперсия



Диссипация





$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + c \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x} = Q$$

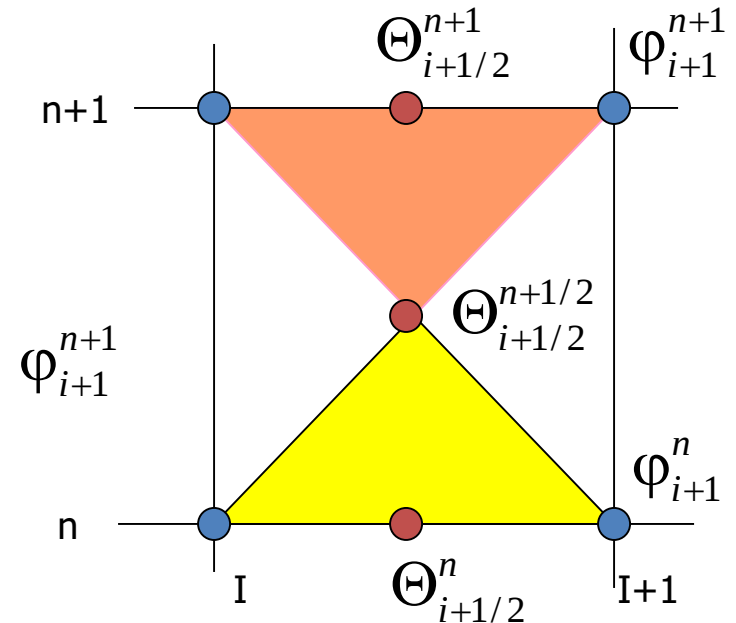
Вычисление промежуточных «консервативных» переменных

$$\Theta_{i+1/2}^{n+1/2}$$

$$\frac{\Theta_{i+1/2}^{n+1/2} - \Theta_{i+1/2}^n}{\tau/2} + c \cdot \frac{\varphi_{i+1}^n - \varphi_i^n}{h} = Q ;$$

Вычисление новых «потокковых» переменных

$$\varphi_{i+1}^{n+1} = 2 \cdot \Theta_{i+1/2}^{n+1/2} - \varphi_i^n, \quad c > 0$$



Вычисление «консервативных» переменных на новом временном слое:

$$\frac{\Theta_{i+1/2}^{n+1} - \Theta_{i+1/2}^{n+1/2}}{\tau/2} + c \cdot \frac{\varphi_{i+1}^{n+1} - \varphi_i^{n+1}}{h} = Q ;$$

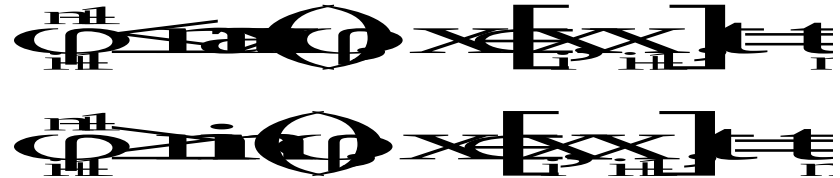


Принципиальный момент: прямое использование принципа максимума

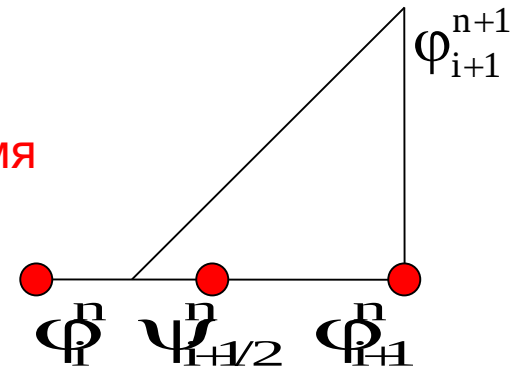
Поскольку КАБАРЕ – схема второго порядка, необходим монотонизатор

$$\varphi_i^{n+1} = 2\psi_{i+1/2}^n - \varphi_i^n$$

Принцип максимума



Непрерывное решение в ячейке представлено тремя сеточными значениями.



Значение потоковой переменной должно оставаться в заданных пределах

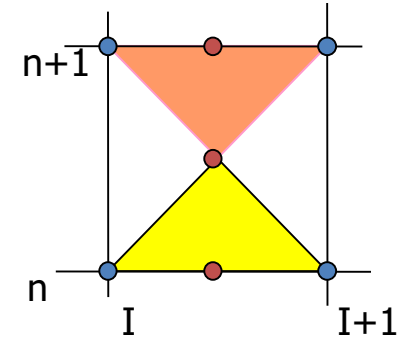
$$\varphi_{i+1}^{n+1} \leq \max_{x \in [x_i, x_{i+1}], t=t_n} (\varphi) = [\max(\varphi)]_{i+1/2}^n = \max(\varphi_{i+1}^n, \psi_{i+1/2}^n, \varphi_i^n) + \tau Q$$

$$\varphi_{i+1}^{n+1} \geq \min_{x \in [x_i, x_{i+1}], t=t_n} (\varphi) = [\min(\varphi)]_{i+1/2}^n = \min(\varphi_{i+1}^n, \psi_{i+1/2}^n, \varphi_i^n) + \tau Q$$



Основные свойства схемы «КАБАРЕ»

- Явная;
- Устойчива при $0 < CFL < 1$;
- Дает точное решение при $CFL = 0.5$, $CFL = 1$;
- **Второй порядок аппроксимации на неравномерных пространственно – временных сетках;**
- Консервативная;
- **Обладает однопараметрическим семейством квадратичных законов сохранения;**
- **Обратима по времени (бездиссипативна);**
- Имеет максимально компактный вычислительный шаблон;
- Минимальные дисперсионные ошибки;
- **Прямое использование принципа максимума для нелинейной коррекции потоков;**
- Отсутствие настроечных параметров;



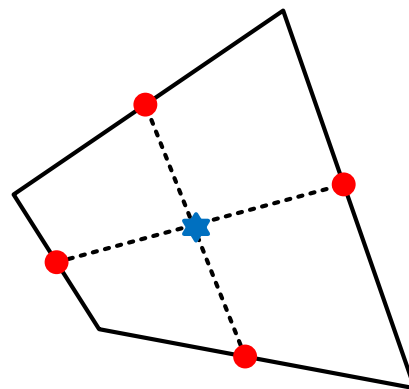


ИБРАЭ

Обобщение на многомерный случай

Консервативная форма уравнения переноса

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{u} \cdot \psi}{\partial \mathbf{x}} + \frac{\partial \mathbf{v} \cdot \psi}{\partial \mathbf{y}} = 0;$$

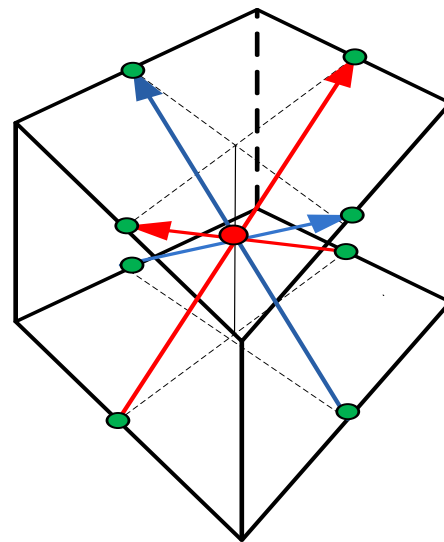


Характеристическая форма

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + (\vec{w} \cdot \vec{n}) \cdot \frac{\partial \psi}{\partial \vec{n}} = Q;$$

$$Q = - \frac{\partial (\vec{w} \cdot \vec{\tau}) \cdot \psi}{\partial \vec{\tau}} - \psi \cdot \frac{\partial (\vec{w} \cdot \vec{n})}{\partial \vec{n}};$$

$$(\vec{n} \cdot \vec{\tau}) = 0;$$





Разработанная вычислительная технология, известная как «разностная схема КАБАРЕ», обладает следующим набором уникальных качеств:

- 1. Стационарные вихри разрешаются на очень грубых сетках и не затухают.*
- 2. Акустические волны при расчетах по схеме КАБАРЕ не затухают.*
- 3. Ударные волны любой интенсивности размазываются на одну расчетную ячейку.*

